

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2010**

CLASA a VIII-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația: $2^{[x]+[y]+1} - 2^{[x]} = 1984$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Propusă de prof. Dumitru Asoltanei

2. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x/x = 2010 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \{y/y = [x], x \in A\}$$

$$C = \left\{ a/a = \frac{n^2+5n}{n+3}, n \in \mathbb{Z}, n \neq -3, |n| \leq 2010 \right\}.$$

- a) Aflați $\text{card}(A \cap \mathbb{Z})$
- b) Aflați $\text{card } B$
- c) Aflați $\text{card } C$.

Propusă de prof. Ivan Ion și Mihut Ioan

3. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB=a$. Calculați distanța dintre dreptele CA' și AD' .

4. Fie un cub de latură 1 cm. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte în interiorul cubului, cel puțin două au distanța dintre ele mai mică sau egal cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 30 IANUARIE 2010
CLASA a VIII-a BAREM

NU EXISTĂ PUNCT DIN OFICIU

1. Ecuația dată se poate scrie astfel:

$$2^{\lfloor x \rfloor} \cdot (2^{\lfloor y \rfloor + 1} - 1) = 2^6 \cdot 3 \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\lfloor x \rfloor} = 2^6 \\ 2^{\lfloor y \rfloor + 1} - 1 = 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow 7p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = 6 \\ \lfloor y \rfloor = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in [6, 7) \times [4, 5)$$

2. Numărul $x = 2010 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$ este mai mare ca 2010.

Se demonstrează relația $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

Și se aplică sumei de fracții din x. $x = 2010 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right) < 2011.$ **2p**

Aflați $\text{card}(A \cap Z) = 0.$ **1p**

$B = \{2001\}$ deci $\text{card } B = 1$ **1p**

$|n| \leq 2010 \Rightarrow n \in \{-2010, -2009, \dots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 2010\}$

$\text{Card} \{-2010, -2009, \dots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 2010\} = 4020$ **1p**

$$\frac{x^2 + 5x}{x+3} = \frac{y^2 + 5y}{y+3} \Rightarrow (x^2 + 5x) \cdot (y+3) = (y^2 + 5y) \cdot (x+3) \Rightarrow (x-y) \cdot (x \cdot y + 3x + 3y + 15) = 0$$

dar $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow (x+3) \cdot (y+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -9 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases}$ sau...

Dacă $n = -2 \Rightarrow a = -6$

$n = -9 \Rightarrow a = -6$, etc... **1p**

$\text{Card } C = 4020 - 4 = 4016$ **1p**

3. $(A'B'C) \perp (AD'B)$ **2 p**

$AD' \perp (A'B'C)$, $AD' \cap (A'B'C) = \{M\}$, **1 p**
 $MP \perp A'C$, $P \in (A'C)$, $d(A'C, AD') = MP$ **2 p**

$MP = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ **2 p**

4. Împărțim cubul în 27 cubulețe egale de muchie $1/3$ cm. Oricum alegem cele 28 de puncte interioare, cel puțin 2 se află în interiorul sau pe fețele unui cubuleț. Lungimea segmentului dintre aceste 2 puncte este mai mică sau egal cu diagonala cubulețului. **7p**